



УДК624.012.35

**Мирсаяпов Илизар Талгатович**

Email: mirsayapov1@mail.ru

доктор технических наук, профессор

**Казанский государственный архитектурно-строительный университет**

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

## Теоретические основы усталостного разрушения стальной арматуры железобетонных конструкций

### Аннотация

*Постановка задачи.* В железобетонных конструкциях при действии циклических нагрузок одним из видов разрушения является усталостное разрушение рабочей арматуры. Режим работы стальной арматуры в составе железобетонной конструкции нестационарный не зависимо от режима нагружения в этих случаях определение усталостной прочности арматуры требует проведения очень большого количества экспериментов, что требует большого количества финансовых и трудовых ресурсов. Целью работы является разработка теории развития трещин усталости стальной арматуры для создания расчетных моделей арматуры с трещинами, для этого необходимо: установить схему образования трещин усталости в арматурных стрежнях для железобетонных конструкций; разработать уравнение изменения удельной энергии разрушения стали в зонах образования и развития трещин; разработать методику расчета долговечности стальной арматуры с трещинами.

*Результаты.* Проведены теоретические исследования усталостной прочности стальной арматуры. Установлено, что усталостное разрушение стальной арматуры характеризуется образованием и развитием микро и макротрещин в структуре металла до критических размеров, выведены две основные стадии: до образования микро и макротрещин усталости; развитие макротрещин усталости до критических размеров. Для моделирования работы стальной арматуры при режимном циклическом деформировании использованы методы механики разрушения упругопластических материалов, с использованием этих методов получены уравнения изменения механических характеристик арматуры при различных режимах циклического нагружения. На основании проведенных теоретических исследований получены уравнения изменения основных силовых параметров стальной арматуры, позволяющие разработать аналитические формулы для оценки усталостной прочности при циклическом нагружении.

*Выводы.* Значимость полученных результатов для строительной отрасли состоит в том, что предложенные расчетные модели позволяют снизить стоимость проведения исследований усталостной прочности арматуры до двух раз, трудоемкость до трех раз по сравнению с общепринятыми традиционными экспериментальными исследованиями.

**Ключевые слова:** стальная арматура, профиль конструкция напряжений, усталостная трещина, поврежденность, пластический ресурс, удельная энергия, напряжение ползучести бетона, упругая работа арматуры.

**Для цитирования:** Мирсаяпов Илизар Т. Теоретические основы усталостного разрушения стальной арматуры железобетонных конструкций // Известия КГАСУ. 2021. № 4 (58). С. 15–25. DOI: 10.52409/20731523\_2021\_4\_15.

### 1. Введение

Процесс многоциклового усталости металлов условно разделяется на две основные стадии: до появления магистральной трещины (стадия зарождения усталостной магистральной трещины); период развития магистральной трещины до разрушения. Если долговечность на I-ой стадии обозначить  $N_T$ , а долговечность на 2-ой стадии  $N_{ж}$ , то полная долговечность от первого цикла нагружения до усталостного разрушения будет:  $N = N_T + N_{ж}$  [1-5]. На стадии зарождения магистральной усталостной трещины происходит интенсивное пластическое деформирование металла в локальных объемах, что приводит к значительным замкнутым петлям гистерезиса, площадь которых равна энергии,

рассеянной в течение одного цикла нагружения. Суммарная ширина этих петель гистерезиса равняется неупругой деформации за цикл. После исчерпания пластического ресурса в локальных пластически деформированных объемах образуются микроскопические трещины, одна из которых может перерасти в магистральную трещину [6-10]. Поэтому первую стадию можно назвать стадией рассеянного усталостного повреждения. Вторая стадия характеризует развитие магистральной трещины по критическим размерам. Под первой магистральной трещиной подразумевается трещина, которая при заданном режиме нагружения развивается с большей скоростью, чем все остальные трещины, и является источником окончательного усталостного разрушения. Благодаря многочисленным экспериментальным данным установлено, что зависимость скорости  $\vartheta = d\Pi/dt$  от накопления усталостных повреждений  $\Pi$  от числа циклов нагружения существенно различна на I-ой и II-ой стадиях усталостного разрушения. Поэтому можно предположить, что механизмы накопления повреждений на этих стадиях различны. Это требует привлечения разных представлений для оценки долговечностей  $N_T$  и  $N_{ж}$ .

Исследования, выполненные в ЦНИИС МТС НИИЖБ, НИС, Гидропроекте показали [11-15], что трещины усталости зарождаются, в основном, в одном из двух очагов концентрации напряжений:

- 1) В тупых углах соединения продольных ребер с наклонными с поперечными выступами (ребрами).
- 2) У основания поперечных выступов (ребер) в местах их сопряжения с телом стержня.

Следовательно, целью работы является разработка теории развития трещин усталости стальной арматуры для создания расчетных моделей арматуры с трещинами. Задачами работы являются: установить схему образования трещин усталости в арматурных стрежнях для железобетонных конструкций; разработать уравнение изменения удельной энергии разрушения стали в зонах образования и развития трещин; разработать методику расчета долговечности стальной арматуры с трещинами.

## 2. Материалы и методы

Для оценки локальных напряжений в основных очагах концентрации определяем эффективные коэффициенты концентрации нагружений, локальные напряжения в зоне первого очага определяются по формуле

$$\sigma_{SM} = 0,843 \cdot \sigma_s^{\max}(t) \cdot b \cdot a \cdot \frac{t \cdot h \cdot m}{\cos \beta} \quad (1)$$

где  $\beta = \sqrt{\frac{k}{E_f}}$ ;  $k = 1.45 \cdot E \frac{h}{\frac{b \cdot b}{\sqrt{\cos \beta}}}$ ;  $f = b \cdot h$ ;  $h$  – ширина поперечного ребра;

$b$  – высота поперечного ребра;

$r = 10h$  – радиус кривизны концентрации;

$a = \frac{1}{h}$ ;  $m = b \cdot a / 2 \cdot \cos \beta$ ,

Переход от местных напряжений к коэффициенту концентрации производится по формуле:

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{sh} + \sigma_M}{\sigma_{sh}} \quad (2)$$

Теоретический коэффициент концентрации напряжений во втором очаге вычисляется в следующей последовательности. Определяется радиус кривизны  $r$  в точке начала сопряжения выступа (ребра) с сердечником стержня и условная расчетная ширина выступа,  $a$ , равная расстоянию между точками начала сопряжения по обе стороны поперечного ребра. Для круговой галтели ширина  $a$ , может быть принята равной ширине выступа плюс удвоенный радиус сопряжения  $r$ . Имея отношение  $a/r$ , вычисляется теоретический коэффициент концентрации:

$$\alpha_k = 1 + 0,21 \cdot \sqrt{\frac{a'}{r}} \cdot \cos^2 \beta \quad (3)$$

где  $\beta$  – угол подъема наклонной части поперечного ребра.

Кроме того, в продольной рабочей арматуре изгибаемых элементов возникает неравномерное растяжение с большой эпюрой у более растянутой грани элемента.

Рассмотрим напряженное состояние стержня в первом цикле нагружения. Пусть на изгибаемый элемент действует такой изгибающий момент  $M$ , что обусловленное им поле напряжений вызывает микрповреждение в зоне влияния вышеотмеченного концентратора (см. рис. 1).

Суммарные напряжения в этой зоне вычисляются как

$$\sigma_{sk}^{max} = \sigma_s^{max}(t_0) + \sigma_{SM} + \Delta\sigma_s, \tag{4}$$

где  $\sigma_s^{max}(t_0)$  – начальные номинальные напряжения в арматуре без учета концентрации напряжений;

$\sigma_{SM}$  –местные напряжения в зоне концентрации;

$\Delta\sigma_s$  –приращение напряжений вследствие изгиба.

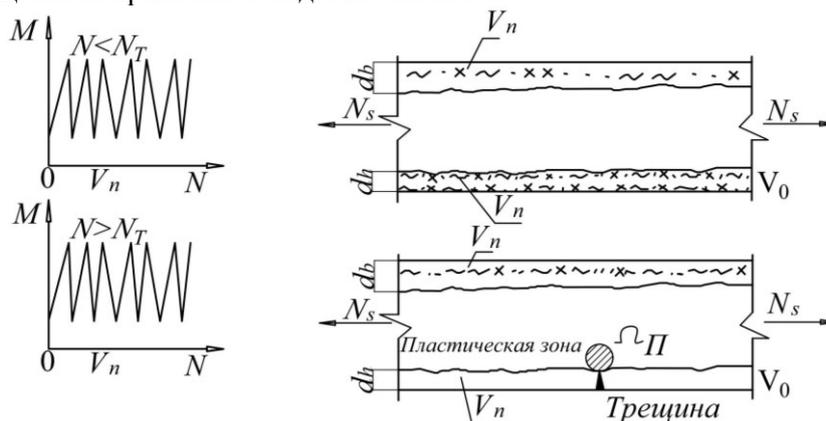


Рис. 1. Схематизация развития поврежденности в арматурном стержне при увеличении количества циклов нагружения (иллюстрация автора)

При определении долговечности  $N_T$  в первую очередь необходимо установить размеры первоначальной зоны поврежденности в местах концентрации напряжений, т.е. размеры зоны влияния концентраторов напряжения на поверхности арматурного стержня. Для этого сначала определяются напряжения в основных очагах концентрации, исходя из формул (1) и (3). В зонах концентрации напряжения, в общем случае, возникает объемное напряженное состояние. При оценке напряженно-деформированного состояния в зоне концентратора могут быть использованы те же критерии, что и при отсутствии концентрации напряжений. Объемное напряженное состояние приводит к увеличению в зонах концентрации первых главных напряжений  $\bar{\sigma}_{1k}^{max}$ , что приводит к проявлению уругопластических деформаций.

### 3. Результаты

Для определения размера зоны влияния концентратора напряжений необходимо вычислить относительный градиент первого главного напряжения  $\sigma_{1k}^{max}$ .

$$\sigma = \frac{\sigma}{\sigma_{max}} = \frac{1}{\sigma_{max}} \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right]_{x=a}. \tag{5}$$

Градиент характеризует быстроту снижения напряжений по мере увеличения расстояния от концентратора. Для упрощения процесса вычислений реальную эпюру распределения напряжений в зоне интегрирования, являющейся касательной к эпюре в точке  $x=a$ . Уравнение этой прямой имеет вид:

$$\sigma_s = u + \sigma(x - a_0). \tag{6}$$

При описании закономерностей циклического деформирования материала в локальной зоне концентрации напряжений, принимаются следующие предпосылки и допущения:

- 1) в пределах начальной зоны пластической поврежденности реализуется жесткое нагружение, т.е.  $\Delta\varepsilon_s = const$ ;
- 2) на расстоянии  $\Delta l_n$  от очага концентрации размах напряжений  $\Delta\sigma_{sk}^{max}$  и размах пластической деформации  $\Delta\varepsilon_{pl,sk}^{max}$  постоянны;

3) образование микротрещины в зоне концентрации происходит, когда  $a_k$  на расстоянии от очага концентрации и накопленная энергия неупругой деформации с учетом рассеяния её в пределах зоны повреждения  $\alpha_t$  ( $\alpha_t > \Delta l_n$ ) достигает величины  $W_{\zeta}$ .

Удельная энергия неупругой деформации за цикл:

$$\Delta W_i = \int_0^{\Delta \varepsilon} \Delta \sigma d(\Delta \varepsilon) = \sigma_{sh}^{max} \cdot k_{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \alpha^{1+m} \cdot \bar{\sigma}_h^{\frac{1-m}{1+m}} \cdot \frac{\sigma_y}{E_s}. \quad (7)$$

Энергия неупругой деформации в зоне концентрации напряжений, соответствующая пределу выносливости, определяется по формуле:

$$\Delta W_{вын} = \int_0^{\Delta \varepsilon_{пц}^n} \Delta \sigma d(\Delta \varepsilon) \quad (8)$$

где  $\Delta \varepsilon_{пц}^n = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-\psi} \cdot N_{вын}^{-1/2}$ ;

$N_{вын}$  – количество циклов нагружения, соответствующее пределу выносливости;

$\psi$  – коэффициент поперечного сужения материала;

$\Delta \sigma_{вын} = \sigma_{спвын} \cdot (1 - \rho_{si})$ ;  $\sigma_{спвын}$  – предел выносливости арматуры для заданного  $\rho_s$ .

Затем определяем потерю энергии за цикл вследствие проявления пластических деформаций в локальных объемах  $\Delta W_r$ :

$$\begin{aligned} \Delta W_r &= \Delta W_i - \Delta W_{вын} = \int_0^{\Delta \varepsilon} \Delta \sigma d(\Delta \varepsilon) - \int_0^{\Delta \varepsilon_{пц}^n} \Delta \sigma_{вын} \cdot d(\Delta \varepsilon) = \\ &= (\sigma_{sh}^{max}) \cdot k_{\sigma} \bar{\varepsilon} \cdot \alpha^{\frac{2}{1+m}} \cdot \sigma_{sh}^{\frac{1-m}{1+m}} \cdot \frac{\sigma_y}{E_s} - \int_0^{\Delta \varepsilon_{пц}^n} \sigma'_{спвын} \cdot (1 - \rho_{si}) \cdot d(\Delta \varepsilon). \end{aligned} \quad (9)$$

После определения  $\Delta W_r$  предполагая, что потеря энергии в каждом цикле имеет одинаковую величину, вычисляем количество циклов нагружения до исчерпания пластического ресурса начальной пластически поврежденной зоны:

$$N_{T1} = \frac{0,5 \varepsilon_b^n (\sigma_y + \sigma_u) \cdot \vartheta}{(\sigma_{sh}^{max}) \cdot k_{\sigma} \bar{\varepsilon} \cdot \alpha^{\frac{2}{1+m}} \cdot \sigma_{sh}^{\frac{1-m}{1+m}} \cdot \frac{\sigma_y}{E_s} - \int_0^{\Delta \varepsilon_{пц}^n} \sigma'_{спвын} \cdot (1 - \rho_{si}) \cdot d(\Delta \varepsilon)} \quad (10)$$

Достоинство уравнения (10) состоит в том, что здесь создается возможность учитывать предысторию нагружения и разные конструктивные и технологические особенности, приводящие к уменьшению  $\varepsilon_b^n$ , как следствие  $N_T$ .

При переходе от одного блока к другому меняется пластический ресурс  $\varepsilon_b^n$  и  $\Delta W_r$ . Поэтому при вычислении предела выносливости удастся учесть смену режима нагружения, если  $vN_1 > N_{T1}$ ; противном случае переменность режима не влияет на продолжительность начальной зоны повреждения.

Затем проверяется условие:

$$N_T > N_1. \quad (11)$$

Если условие (11) выполняется, то долговечность начальной зоны больше или равняется продолжительности I-ой стадии, и на этом этапе развитие трещин не происходит; в противном случае необходимо определить приращение длины микротрещины за время  $\Delta N = N_1 - N_{T1}$ . Рассмотрим развитие начальной микротрещины с длиной, образовавшейся в зоне концентратора. Многочисленными экспериментальными исследованиями установлено, что развитие микротрещин при циклическом нагружении существенно неравномерно. При этом необходимо выделить инкубационный период и период непрерывного развития трещин, которые чередуются вплоть до полного разрушения образца.

Для описания развития микротрещины на этой стадии используем модель развития усталостной трещины, предложенную и основанную на рассмотрении удельной энергии неупругой деформации, на расстоянии  $x^*$  от вершины трещины с учетом энергии, необратимо рассеиваемой в пределах пластической зоны повреждения.

Распределение деформаций и напряжений в вершине неподвижной трещины при статическом нагружении для арматурной стали может быть представлено в виде

следующих зависимостей:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = A \left( \frac{J}{AIm} \right)^{\frac{m}{1+m}} \cdot \frac{1}{r^{1+m}} f_{ij}(\theta) \quad (12)$$

$$\varepsilon_{ij}(r, \theta) = \left( \frac{J}{AIm} \right)^{\frac{m}{1+m}} \cdot \frac{1}{r^{1+m}} \varphi_{ij}(\theta), \quad (13)$$

где  $J$  – джой–интеграл Черепанова–Раиса,

$Im$  – безразмерная функция от показателя деформационного упрочнения  $m$  вида раскрытия трещины.

Для наиболее часто встречающихся значений  $m$  и при плоской деформации при растяжении  $Im = 5/282$ . Для трещин нормального разрыва нормированные функции от угла ( $\theta$ ).

$$f_{ij}(\theta) = \varphi_{ij}(\theta) = \begin{cases} I (i = j) \\ 0 (i \neq j) \end{cases}, \quad (14)$$

где  $m$  – показатель упрочнения;

$r$  – расстояние от вершины трещины до рассматриваемой точки,

$\theta$  – угол между продолжением трещины и рассматриваемой точкой у её вершины.

При этом связь между напряжениями и пластической деформацией представляется в виде степенной зависимости:

$$\sigma_{\varepsilon} = A \cdot \varepsilon_{p\varepsilon}^m, \quad (15)$$

здесь  $\sigma_{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon_{p\varepsilon}$  эквивалентное напряжение поэнергетической теории прочности и эквивалентная пластическая деформация. для случая циклического нагружения уравнения (13) и (14) приводим к виду:

$$\Delta \varepsilon = \left( \frac{1-\nu^2}{A' Im} \right)^{\frac{m}{1+m}} \cdot \left( \frac{\Delta k^2}{E} \right)^{\frac{1}{1+m}} \cdot \frac{1}{r^{1+m}} \cdot \varphi_{ij}(\theta) \quad (16)$$

$$\Delta \sigma = \left( \frac{1-\nu^2}{A' Im} \right)^{\frac{m}{1+m}} \cdot \left( \frac{\Delta k^2}{E} \right)^{\frac{m}{1+m}} \cdot \frac{1}{r^{1+m}} \cdot f_{ij}(\theta) \quad (17)$$

Основные допущения принятой модели

1) в вершине усталостной трещины в пределах пластической зоны усталостного повреждения реализуется жесткое нагружение, т.е.  $\Delta \varepsilon_s = \text{const}$ ;

2) на расстоянии  $x^*$  от вершины трещины размах напряжений  $\Delta \sigma_s^{\max}$  и размах пластической деформации  $\Delta \varepsilon_{pl}^{\max}$  постоянны;

3) распределение напряжений и неупругих деформаций в вершине трещины при  $R_m \geq r \geq x^*$ , описывается (16) и (17) уравнениями;

4) прирост длины на величину  $x^*$  происходит, когда на расстоянии  $x^*$  от вершины трещины накопленная энергия неупругой деформации с учетом рассеяния её в пределах зоны повреждения  $\dot{\alpha}_m (\alpha_m \geq x^*)$  достигает величины  $W_R$ .

Размеры пластической зоны поврежденности в вершине микротрещины определяем в виде:

$$\alpha_i = \frac{k_I^{\max}}{\sigma_{\text{вын}}^2 \cdot Y^2(l) \pi} \quad (18)$$

$$k_I^{\max} = \sigma_s^{\max}(t) \cdot \sqrt{a_1} \cdot Y(l) \quad (19)$$

Необходимо отметить, что  $k_I^{\max}$  вычисленный по (19), может быть меньше  $k_{th}$ , но тем не менее развитие микротрещины будет происходить, так как известно, что поверхностные микротрещины длиной до 0,5 мм развиваются при  $k_I^{\max} \leq k_{th}$ .

Удельная энергия неупругой деформации за цикл:

$$\Delta W = \int_0^{\Delta \varepsilon} \Delta \sigma d(\Delta \varepsilon). \quad (20)$$

Подставляя в значения  $\Delta \varepsilon$  и  $\Delta \sigma$ , из (12) и (13) получаем:

$$\Delta W_i = \frac{(1-\nu^2)}{Im E_s} \cdot \frac{1}{m+1} \cdot \frac{\Delta k^2}{r} \cdot \varphi_{ij}(\theta) \cdot f_{ij}(\theta). \quad (21)$$

Размер  $i$  – гомикроэлемента пластической зоны  $x^*$  можно найти из условия, что на расстоянии  $x^*$  не происходит накопление повреждений, и энергия неупругой деформации за цикл  $\Delta W^*$  на расстоянии  $x^*$  от вершины трещины равна энергии неупругой деформации за цикл при напряжениях, соответствующих пределу выносливости  $\Delta W_{\text{вын}}$ . Тогда, исходя из (21) имеем:

$$x^* = \frac{J}{I_m \Delta W_{\text{вын}}} = \frac{\Delta k_i^2 (1-v^2)}{E \cdot I_m \cdot \Delta W_{\text{вын}}} \cdot \frac{1}{1+m} \tag{22}$$

Энергия неупругой деформации при жестком нагружении, соответствующая пределу выносливости, определяется по формуле:

$$\Delta W_{\text{вын}} = \int_0^{\Delta \epsilon_{\text{пц}}^u} \Delta \sigma_{\text{вын}} \cdot d(\Delta \epsilon),$$

$$\Delta \epsilon_{\text{пц}}^u = \frac{1}{2} I_n \frac{1}{1-\Psi} \cdot N_{\text{вын}}^{-1/2} \tag{23}$$

где  $\Psi$  – коэффициент поперечного сужения, для арматурных сталей он изменяется от 0,41 до 0,69; в среднем можно принять;

$N_{\text{вын}}$  – количество циклов нагружения, соответствующее пределу выносливости;

$\Delta \sigma_{\text{вын}} = \sigma_{\text{вын}} (1 - \rho_s(t))$ ;

$\sigma_{\text{вын}}$  – предел выносливости для заданного  $\rho_s(t)$ .

Пластическую зону поврежденности в вершине микротрещины разбиваем на отдельные микроэлементы, которые одновременно подвергаются циклическому нагружению различной интенсивности. Распределение удельной энергии неупругой деформации за цикл в пределах пластической зоны, описываемое уравнением (21), схематично показано на рис. 2.

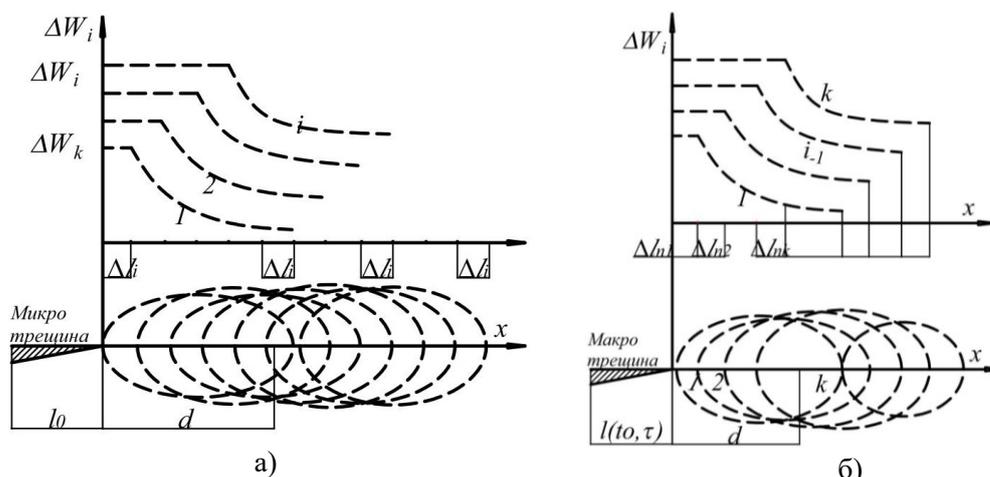


Рис.2.а) Схема накопления удельной энергии неупругой деформации стали в пределах пластической зоны в вершине микротрещины б) Схемы перемещения пластической зоны при развитии макротрещины и накопления удельной энергии неупругой деформации в пределах пластической зоны предразрушения (иллюстрация автора)

В соответствии с принятыми допущениями на расстоянии  $\Delta l$  от вершины микротрещины удельная энергия неупругой деформации стали имеет постоянное значение, т.е.  $\Delta W_i = \Delta W_k = \text{const}$ .

Развитие микротрещины начинается с разрушения микроэлемента I. полное усталостное разрушение микроэлемента I происходит при достижении, энергией неупругого гистерезиса критического значения

$$W_p = \sum_{i=1}^{N_R} \left[ \Delta W_i - \Delta W_r \left( \frac{\Delta W_i}{\Delta W_r} \right)^\beta \right] = \text{const} = W_{pl} \tag{24}$$

где  $\Delta W_r$  – удельная энергия неупругих деформаций за цикл при. равных пределу выносливости;

$\Delta W_i$  – удельная энергия неупругой деформации стали в i -ом цикле нагружения, вычисляется по (21).

При этом длина микротрещины увеличивается на  $\Delta l$ , а пластическая зона перемещается на  $\Delta l$  по фронту микротрещины (см. рис. 2). По вышеописанному механизму происходит постепенное увеличение длины микротрещины, и перемещение пластической зоны впереди развивающейся микротрещины. Необходимо также отметить, что этот процесс является скачкообразным, так как периоды непрерывного развития микротрещины чередуются с периодами задержки.

Условие разрушения  $i$  – го элемента описывается уравнением (24) переходя к сумме, из уравнения (24) получим:

$$\sum_{j=1}^i \Delta \bar{W}_{ij} \cdot N_j = W_p. \tag{25}$$

Учитывая (21) и (23) уравнение (25) для случая стальной арматуры перепишем в виде:

$$\Delta \bar{W}_{ij} = \Delta W_{ij} - \Delta W_r = \frac{1-\nu^2}{I_m \cdot E_s} \cdot \frac{1}{m'} \cdot \frac{\Delta k^2}{r_1} \cdot \varphi_{i\text{гуд}}(\theta) \cdot f_{ij}(\theta) - \int_0^{\Delta \varepsilon_{\text{пц}}} \Delta \sigma_{\text{вын}} \cdot d(\Delta \varepsilon) \tag{26}$$

где  $r_1 \cong x^*$  расстояние от вершины микротрещины до правой границы  $i$ -го микроэлемента.

Учитывая (22) и (26), из (25) определяем долговечность  $i$ -го микроэлемента в циклах:

$$N_1 = \frac{0,5 \cdot \varepsilon_b^n \cdot (\sigma_y + \sigma_u)}{\frac{1-\nu^2}{I_m \cdot E_s} \cdot \frac{1}{m'+1} \cdot \frac{\Delta k^2}{r} \cdot \varphi_{ij}(\theta) \cdot f_{ij}(\theta) - \int_0^{\Delta \varepsilon_{\text{пц}}} \Delta \sigma_{\text{вын}} \cdot d(\Delta \varepsilon)}. \tag{27}$$

Аналогичным образом определяются долговечности 2-го,  $i$ -го микроэлементов. При этом необходимо иметь ввиду, что долговечность условных микроэлементов уменьшается с удалением рассматриваемого микроэлемента от вершины микротрещины, поскольку, чем дальше от вершины микротрещины будет, располагается микроэлемент, тем больше дополнительной энергии неупругой деформации накопится в нем из-за предварительного нагружения его напряжениями.

Проводя аналогичные вычисления, составляем общее уравнение долговечности для любого микроэлемента пластической зоны

$$N_i = \frac{0,5 \cdot \varepsilon_b^n \cdot (\sigma_y + \sigma_u) - \sum_{1}^{k-1} \Delta W_{i-1}}{\frac{1-\nu^2}{I_m \cdot E_s} \cdot \frac{1}{m'+1} \cdot \frac{\Delta k^2}{r} \cdot \varphi_{ij}(\theta) \cdot f_{ij}(\theta) - \int_0^{\Delta \varepsilon_{\text{пц}}} \Delta \sigma_{\text{вын}} \cdot d(\Delta \varepsilon)} \tag{28}$$

Далее начинается II-я стадия усталостного повреждения стадия развития магистральной трещины рис. 3. Схематически эта трещина показана на рис. 2.

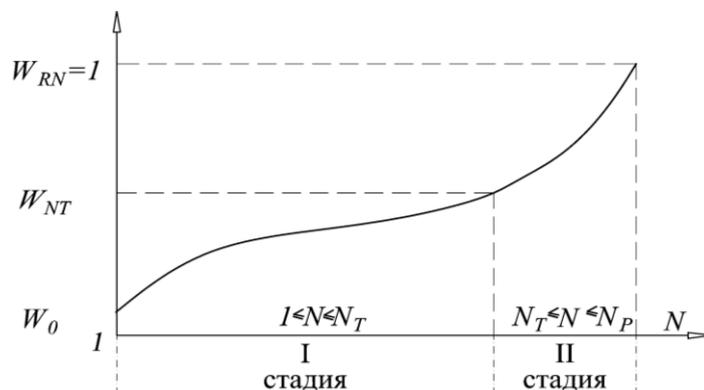


Рис.3. Схема зависимости накопления усталостных повреждений от числа циклов нагружения (иллюстрация автора)

На этой стадии распределение напряжений и деформаций в вершине микротрещины определяется коэффициентом интенсивности напряжений  $k_I$ , который является функцией приложения нагрузки, геометрии тела и расположения трещины.

Экспериментально установлено, что макротрещины образуются с двух сторон арматуры в местах соединения продольных и поперечных ребер. Тогда схема нагружения арматурного стержня будет иметь вид рис. 4.

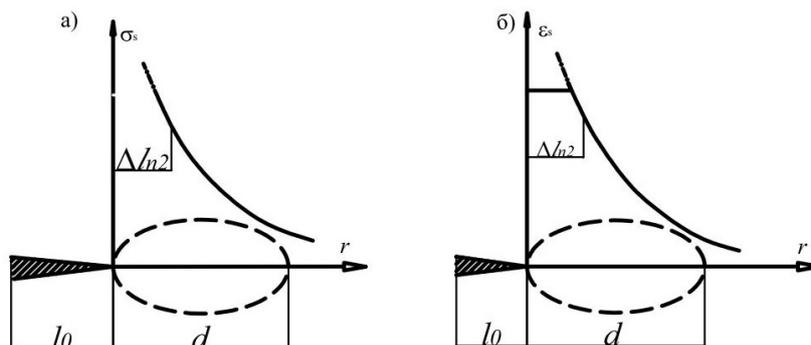


Рис 4. Пластическая зона у вершины макротрещины и распределение напряжений (а) и деформаций (б) в пределах пластической зоны и перпендикулярных к направлению трещины (иллюстрация автора)

При этом принимаем, что на расстоянии  $\Delta l_n$  от вершины макротрещины  $\sigma_{s1} = \sigma_{sr} = const, \epsilon_{s1} = \epsilon_{sR} = const, \Delta W_1 = \Delta W_R.$

$$\sum_{j=1}^i \Delta W_{ij} \cdot N_j = W_p \tag{29}$$

Учитывая уравнение для случая стальной арматуры, приводим к виду:

$$\Delta \bar{W}_{ij} = \Delta W_{ij} - \Delta W_r = \frac{1-v^2}{I_m E_s} \cdot \frac{n'}{1+n'} \cdot \frac{\Delta k^2}{r_i} \cdot \bar{\sigma}(n') \cdot \epsilon(n') - \int_0^{\Delta \epsilon_{пнц}^H} \Delta \sigma_{вын} \cdot d(\Delta \epsilon) \tag{30}$$

где  $r_i$ - расстояние от вершины макротрещины до рассматриваемой точки.

Учитывая, определяем долговечность  $i$ -го микроэлемента в циклах:

$$N_1 = \frac{0,5 \cdot \epsilon_b^n \cdot (\sigma_y + \sigma_u) - \sum_1^{k-1} \Delta W_{i-1}}{\frac{1-v^2}{I_m E_s} \cdot \frac{n'}{1+n'} \cdot \frac{\Delta k^2}{r_i} \cdot \bar{\sigma}(n') \cdot \epsilon(n') - \int_0^{\Delta \epsilon_{пнц}^H} \Delta \sigma_{вын} \cdot d(\Delta \epsilon)} \tag{31}$$

#### 4. Обсуждение

Аналогичным образом определяются долговечности 2-го,  $i$ -го микроэлементов. При этом необходимо иметь ввиду, что долговечность условных микроэлементов уменьшается с удалением рассматриваемого микроэлемента от вершины макротрещины, поскольку, чем дальше от вершины макротрещины будет располагаться микроэлемент, тем больше дополнительной энергии неупругой деформации накопится в нем из-за предварительного нагружения его напряжениями  $\Delta \sigma \cdot \varphi(\xi)$ , где  $\varphi(\xi)$  коэффициент снижения напряжений растяжения по мере удаления от вершины макротрещины).

Учитывая вышеизложенное и уравнения напишем общую формулу вычисления долговечности  $i$ -го элемента в пределах пластической зоны, когда  $l_0 < l \leq l_0 + d$ .

$$N_i = \frac{0,5 \cdot \epsilon_b^n \cdot (\sigma_y + \sigma_u) - \sum_1^{k-1} \Delta W_{i-1}}{\frac{1-v^2}{I_m E_s} \cdot \frac{n'}{1+n'} \cdot \frac{\Delta k^2}{r_i} \cdot \bar{\sigma}(n') \cdot \epsilon(n') - \int_0^{\Delta \epsilon_{пнц}^H} \Delta \sigma_{вын} \cdot d(\Delta \epsilon)} \tag{32}$$

Энергия предварительного неупругого деформирования вычисляется по форме:

$$\Delta W_{np(i-1)} = \frac{1-v^2}{I_m E_s} \cdot \frac{n'}{1+n'} \cdot \frac{\Delta k_{\xi i+1}^2}{l_0 + nd + (i-1)\Delta l_n} \cdot \bar{\sigma}(n') \cdot \epsilon(n') - \int_0^{\Delta \epsilon_{пнц}^H} \Delta \sigma_{вын} \cdot d(\Delta \epsilon) \tag{33}$$

где  $\Delta k_{\xi i+1}^2$  – размах коэффициента интенсивности напряжений для длины макротрещины  $l(t) = l_0 + nd + (i - 1)\Delta l_n$ .

Исходя из уравнений (32) и (33), определяем долговечность  $i$ -го микроэлемента в пределах пластической зоны для случая, когда  $l(t) > l_0 + d$ .

$$N_i = \frac{0,5 \cdot \epsilon_b^n \cdot (\sigma_y + \sigma_u) - \sum_1^{k-1} \Delta W_{np(i-1)}}{\frac{1-v^2}{I_m E_s} \cdot \frac{n'}{1+n'} \cdot \frac{\Delta k^2}{l_0 + nd + (i-1)\Delta l_n} \cdot \bar{\sigma}(n') \cdot \epsilon(n') - \int_0^{\Delta \epsilon_{пнц}^H} \Delta \sigma_{вын} \cdot d(\Delta \epsilon)} \tag{34}$$

Количество циклов нагружения до увеличения длины макротрещины  $l(t) = l_0 + 2d$  будет:

$$N_{k1} = N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_{k-1} + N_{k1} = \sum_{i=1}^{k1} N_i \tag{35}$$

По вышеописанному механизму происходит скачкообразное развитие макротрещины до тех пор, пока:

$$l(t_i) < l_u \tag{36}$$

После нарушения условия (36), если не произойдет уменьшение уровня нагрузки,

начинается динамическое нестабильное развитие макротрещины, что, в конце концов, приводит к усталостному разрыву арматурного стержня.

Существующие методы определения долговечности арматурных сталежелезобетонных конструкций, в отличие от разработанного автором метода, основываются на методе линейного накопления усталостных повреждений. По этой причине, фактические значения отличаются от расчетных в десятки раз в сторону запаса. Предлагаемый метод позволяет рассчитывать долговечность с точностью в пределах 15 % в сторону запаса.

## 5. Заключение

Выполненные теоретические исследования усталостной прочности стальной арматуры железобетонных конструкций при режимном нагружении позволили установить следующие основные закономерности усталостного разрушения арматуры:

1. Основной причиной усталостного разрушения стальной арматуры железобетонных конструкций является образование и развитие микро- и макротрещин усталости в структуре металла в местах соединения продольных и поперечных ребер арматуры.

2. Разработана новая теория, описывающая развитие микро- и макротрещин усталости и установлены схемы образования трещин усталости в арматурных стержнях железобетонных конструкций.

3. Впервые разработано уравнение изменения удельной энергии разрушения стали в зонах образования и развития трещин.

4. Разработаны уравнения долговечности арматуры до исчерпания пластического ресурса начальной пластически поврежденной зоны и долговечности до исчерпания пластического ресурса поврежденной зоны перед вершиной макротрещины.

5. Получены аналитические уравнения изменения основных силовых параметров, характеризующих сопротивление арматуры развитию усталостных трещин.

## Список библиографических ссылок

1. Atutis E., Valivonis J., Atutis M. Deflection determination method for bfrp prestressed concrete beams under fatigue loading // *Compos. Struct.* 2019. № 226. P. 111182. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111182.
2. Kim G., Loreto G., Kim J.-Y., Kurtis K. E., Wall J. J., Jacobs L. J. In situ nonlinear ultrasonic technique for monitoring microcracking in concrete subjected to creep and cyclic loading // *Ultrasonics*. 2018. №88. P. 64–71. DOI: 10.1016/j.ultras.2018.03.006.
3. Li Q., Liu M., Lu Z., Deng X. Creep Model of High-Strength High-Performance Concrete Under Cyclic Loading // *J. Wuhan Univ. Technol. Sci. Ed.* 2019. №3 (34). P. 622–629. DOI: 10.1007/s11595-019-2096-9.
4. Chen P., Zhou X., Zheng W., Wang Y., Bao B. Influence of high sustained loads and longitudinal reinforcement on long-term deformation of reinforced concrete beams // *J. Build. Eng.* 2020. № 30. DOI: 10.1016/j.job.2020.101241.
5. Bouziadi F., Boulekbache B., Haddi A., Hamrat M., Djelal C. Finite element modeling of creep behavior of FRP-externally strengthened reinforced concrete beams // *Eng. Struct.* 2020. №204. P. 109908. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.109908.
6. Mirsayapov Ilshat T. Detection of stress concentration regions in cyclic loading by the heat monitoring method // *Mech. Solids*. 2010. №1(45). P.133–139. DOI: 10.3103/S0025654410010164.
7. Song L., Fan Z., Hou J. Experimental and Analytical Investigation of the Fatigue Flexural Behavior of Corroded Reinforced Concrete Beams // *Int. J. Concr. Struct. Mater.* 2019. №1(13). DOI: 10.1186/s40069-019-0340-5.
8. Zamaliev F. S., Zakirov M. A. Stress-strain state of a steel-reinforced concrete slab under long-term // *Magazine of Civil Engineering*. 2018. P. 12–23.
9. Tang H., Chen Z., Avinesh O., Guo H., Meng Z., Engler-Pinto C., Kang H. Notch Insensitivity in Fatigue Failure of Chopped Carbon Fiber Chip-Reinforced Composites

- Using Experimental and Computational Analysis // Compos. Struct. 2020. №10(16). P. 112280. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112280.
10. Choe G., Shinohara Y., Kim G., Lee S., Lee E., Nam J. Concrete corrosion cracking and transverse bar strain behavior in a reinforced concrete column under simulated marine conditions // Appl. Sci. 2020. №5(10). DOI:10.3390/app10051794.
  11. Gambarelli S., Ožbolt J. Interaction between damage and time-dependent deformation of mortar in concrete: 3D FE study at meso-scale // IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. 2019. № 615. P. 012013. DOI:10.1088/1757-899X/615/1/012013.
  12. Augéard E., Ferrier E., Michel L. Mechanical behavior of timber-concrete composite members under cyclic loading and creep // Eng. Struct. 2020. №210. P. 110289. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110289.
  13. Trekin N. N., Kodysh E. N., Mamin A. N., Trekin D. N., Onana J. Improving methods of evaluating the crack resistance of concrete structures // American Concrete Institute, ACI Special Publication. 2018. № 326. P. 93.1–93.6.
  14. Liang J., Nie X., Masud M., Li J., Mo Y. L. A study on the simulation method for fatigue damage behavior of reinforced concrete structures // Eng. Struct. 2017. № 150, P. 25–38. DOI:10.1016/j.engstruct.2017.07.001
  15. Zhang G., Zhang Y., Zhou Y. Fatigue Tests of Concrete Slabs Reinforced with Stainless Steel Bars // Adv. Mater. Sci. Eng. 2018. P. 1-5.

**Mirsayapov Ilizar Talgatovich**

doctor of technical sciences, professor

Email: mirsayapov1@mail.ru

**Kazan State University of Architecture and Engineering**

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya str., 1

**Theoretical basis of fatigue failure of steel reinforcement of reinforced concrete structures**

**Abstract**

*Problem Statement.* In reinforced concrete structures under cyclic loads one of the types of failure is fatigue failure of working reinforcement. Operation mode of steel reinforcement in reinforced concrete constructions is non-stationary irrespective of loading conditions in these cases determination of fatigue resistance of reinforcement requires a great number of experiments which requires a great number of financial and manpower resources. The aim of the work is to develop a theory of fatigue cracking of steel reinforcement to create design models of reinforcement with cracks, for this purpose it is necessary: to establish the scheme of fatigue crack formation in reinforcement rods for reinforced concrete structures; to develop the equation of change in specific energy of steel fracture in the zones of crack formation and development; to develop a methodology for calculating the durability of steel reinforcement with cracks.

*Results.* Theoretical research of fatigue strength of steel reinforcement has been carried out. It is established, that fatigue failure of steel reinforcement is characterized by formation and development of micro and macro cracks in metal structure up to critical dimensions; two basic stages are derived: to the formation of micro and macro fatigue cracks; development of macro-fatigue cracks to critical dimensions. The methods of fracture mechanics of elastoplastic materials were used for modeling of steel reinforcement operation under cyclic mode of deformation and the equations of change of mechanical characteristics of reinforcement under different modes of cyclic loading were obtained using these methods. On the basis of theoretical research the equations of change of basic force parameters of steel reinforcement have been obtained, which allows developing analytical formulas for evaluation of fatigue strength under cyclic loading.

*Conclusions.* The significance of the obtained results for the construction industry lies in the fact that the proposed calculation models allow reducing the cost of reinforcement fatigue resistance studies to two times and labour input to three times as compared with the conventional experimental studies.

**Keywords:** steel reinforcement, stress design profile, fatigue crack, damage, plastic life, specific energy, concrete creep stress, elastic work of reinforcement.

**For citation:** Mirsayapov Ilizar T. Theoretical basis of fatigue failure of steel reinforcement of reinforced concrete structures // *Izvetija KGASU*. 2021. № 4 (58). P. 15–25. DOI: 10.52409/20731523\_2021\_4\_15.

## References

1. Atutis E., Valivonis J., Atutis M. Deflection determination method for bfrp prestressed concrete beams under fatigue loading // *Compos. Struct.* 2019. № 226. P. 111182. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111182.
2. Kim G., Loreto G., Kim J.-Y., Kurtis K. E., Wall J. J., Jacobs L. J. In situ nonlinear ultrasonic technique for monitoring microcracking in concrete subjected to creep and cyclic loading // *Ultrasonics*. 2018. №88. P. 64–71. DOI: 10.1016/j.ultras.2018.03.006.
3. Li Q., Liu M., Lu Z., Deng X. Creep Model of High-Strength High-Performance Concrete Under Cyclic Loading // *J. Wuhan Univ. Technol. Sci. Ed.* 2019. №3 (34). P. 622–629. DOI: 10.1007/s11595-019-2096-9.
4. Chen P., Zhou X., Zheng W., Wang Y., Bao B. Influence of high sustained loads and longitudinal reinforcement on long-term deformation of reinforced concrete beams // *J. Build. Eng.* 2020. № 30. DOI: 10.1016/j.job.2020.101241.
5. Bouziadi F., Boulekbache B., Haddi A., Hamrat M., Djelal C. Finite element modeling of creep behavior of FRP-externally strengthened reinforced concrete beams // *Eng. Struct.* 2020. №204. P. 109908. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.109908.
6. Mirsayapov Ilshat T. Detection of stress concentration regions in cyclic loading by the heat monitoring method // *Mech. Solids*. 2010. №1(45). P.133–139. DOI: 10.3103/S0025654410010164.
7. Song L., Fan Z., Hou J. Experimental and Analytical Investigation of the Fatigue Flexural Behavior of Corroded Reinforced Concrete Beams // *Int. J. Concr. Struct. Mater.* 2019. №1(13). DOI: 10.1186/s40069-019-0340-5.
8. Zamaliev F. S., Zakirov M. A. Stress-strain state of a steel-reinforced concrete slab under long-term // *Magazine of Civil Engineering*. 2018. P. 12–23.
9. Tang H., Chen Z., Avinesh O., Guo H., Meng Z., Engler-Pinto C., Kang H. Notch Insensitivity in Fatigue Failure of Chopped Carbon Fiber Chip-Reinforced Composites Using Experimental and Computational Analysis // *Compos. Struct.* 2020. №10(16). P. 112280. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112280.
10. Choe G., Shinohara Y., Kim G., Lee S., Lee E., Nam J. Concrete corrosion cracking and transverse bar strain behavior in a reinforced concrete column under simulated marine conditions // *Appl. Sci.* 2020. №5(10). DOI:10.3390/app10051794.
11. Gambarelli S., Özbolt J. Interaction between damage and time-dependent deformation of mortar in concrete: 3D FE study at meso-scale // *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* 2019. № 615. P. 012013. DOI:10.1088/1757-899X/615/1/012013.
12. Augeard E., Ferrier E., Michel L. Mechanical behavior of timber-concrete composite members under cyclic loading and creep // *Eng. Struct.* 2020. №210. P. 110289. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110289.
13. Trekin N. N. Kodysh E. N., Mamin A. N., Trekin D. N. Onana J. Improving methods of evaluating the crack resistance of concrete structures // *American Concrete Institute, ACI Special Publication*. 2018. № 326. P. 93.1–93.6.
14. Liang J., Nie X., Masud M., Li J., Mo Y. L. A study on the simulation method for fatigue damage behavior of reinforced concrete structures // *Eng. Struct.* 2017. № 150, P. 25–38. DOI:10.1016/j.engstruct.2017.07.001
15. Zhang G., Zhang Y., Zhou Y. Fatigue Tests of Concrete Slabs Reinforced with Stainless Steel Bars // *Adv. Mater. Sci. Eng.* 2018. P. 1-5.